in Zusammenarbeit mit der Inspection Pédagogique Régionale und der IREM de Strasbourg

Mathematik Ohne Grenzen

Probewettbewerb Dezember 2014

- Für jede Aufgabe, auch für nicht bearbeitete, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.
- Auch fehlerhafte oder unvollständige Lösungen werden begutachtet.
- Die Sorgfalt der Darstellung wird mit bewertet.

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 1
7 Punkte

Tirer le portrait

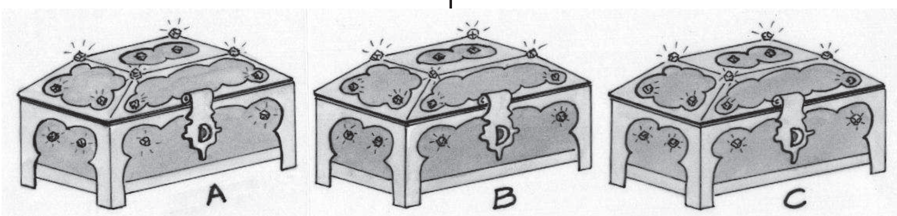
Verfasst den Lösungstext in einer der vier Fremdsprachen im Umfang von mindestens 30 Wörtern.

Il était une fois une belle princesse qui possédait trois coffrets : A, B et C. Dans un des coffrets, elle avait mis son portrait.
Celui qui voulait l'épouser devait trouver le coffret contenant le portrait.
Une phrase était écrite sur chaque coffret :
Coffret A : « Le portrait n'est pas ici. »
Coffret B : « Le portrait est ici. »
Coffret C : « Le portrait n'est pas dans le coffret B. »

Sachant qu'une seule des trois phrases est vraie, trouver le coffret qui contient le portrait. Justifier.

Había una vez una bella princesa que poseía tres cofres: A, B y C. En uno de los cofres, había metido su retrato.
Él que quisiera casarse con ella tenía que encontrar el cofre que contenía el retrato.
Una frase estaba escrita sobre cada cofre:
Cofre A: « El retrato no está aquí.»
Cofre B: « El retrato está aquí.»
Cofre C: « El retrato no está en el cofre B.»

Sabiendo que solo una de las de las tres frases es verdadera, encuentra el cofre que contiene el retrato. Justifica la respuesta.



Once upon a time there was a beautiful princess who had three caskets: A, B and C. She had put her portrait into one of the caskets.
Anyone who wished to marry her had to find out which casket contained her portrait.
A sentence was written on each casket:
Casket A: "The portrait is not here."
Casket B: "The portrait is here."
Casket C: "The portrait is not inside casket B."

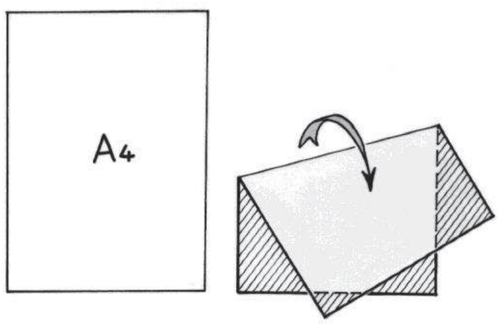
Only one of these three sentences is true. Find out which casket contains the portrait. Justify your answer.

C'era una volta una bella principessa che possedeva tre scrigni: A, B e C. In uno di questi aveva riposto il suo ritratto.
Chi avesse voluto sposarla avrebbe dovuto individuare lo scrigno con il ritratto all'interno.
Su ogni scrigno c'era scritta una frase:
Scrigno A: « Il ritratto non è qui.»
Scrigno B: « Il ritratto è qui.»
Scrigno C: « Il ritratto non è nello scrigno B.».

Individuate lo scrigno con il ritratto sapendo che solo una delle tre frasi è vera. Giustificate la vostra risposta.

Aufgabe 2
5 Punkte

Cleverle



Während der Mathestunde schreibt Louis seinem Tischnachbarn eine Nachricht auf ein DIN A4 Blatt (21 cm $\times$ 29,7 cm). Sein Lehrer erwischt ihn dabei. Damit der Lehrer nicht sieht, was er geschrieben hat, faltet Louis das Blatt blitzschnell zusammen und ruft:
„Moment! Ich habe eine Mathe-Aufgabe: Wie groß ist der Umfang der vier Dreiecke insgesamt?"

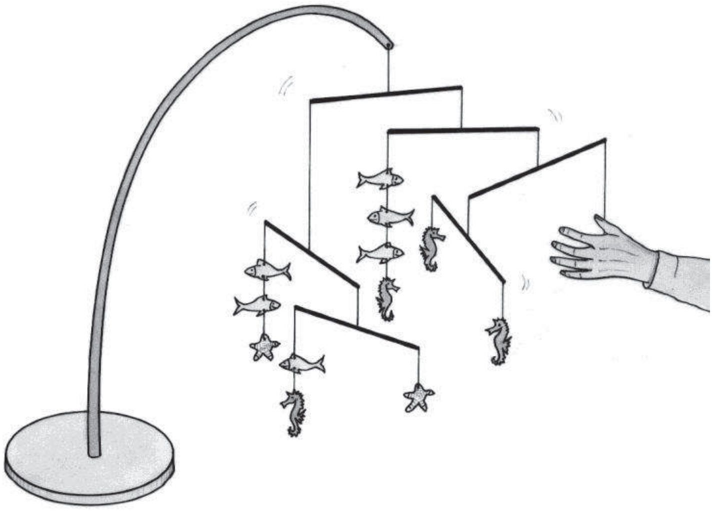
Löst die Aufgabe und begründet eure Antwort.

Aufgabe 3
7 Punkte

Mobile

An dem abgebildeten Mobile hängen drei Sorten von Objekten: Fische, Seepferdchen und Seesterne. Die Querstäbe sind alle gleich lang und haben dieselbe Masse. Sie sind jeweils in der Mitte an sehr dünnen Fäden aufgehängt, deren Masse man vernachlässigen kann.
Alle Objekte derselben Sorte sind gleich schwer, alle Stäbe stehen waagerecht – das Mobile ist im Gleichgewicht.

Welches Objekt verbirgt sich hinter der Hand? Begründet eure Antwort.



Aufgabe 4
5 Punkte

Pantoffelkino

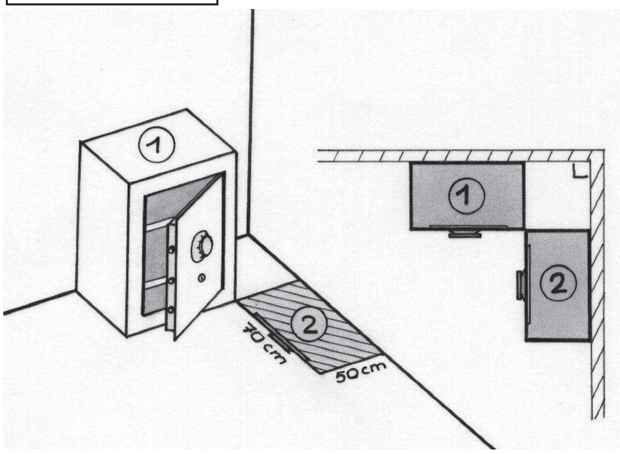
Ein Film, der auf dem Videokanal MsF-TV ausgestrahlt wird, hat nicht dieselbe Dauer wie wenn er im Kino gezeigt wird. Im Kino beträgt die Bildfrequenz 24 Bilder pro Sekunde, bei MsF-TV dagegen 25 Bilder pro Sekunde.
Bei „Vom Winde verweht“ unterscheiden sich Fernseh- und Kinoversion um 9 Minuten und 30 Sekunden.

Wie lange dauert der Film im Kino, wie lange im Fernsehen? Begründet eure Antwort.

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 5
7 Punkte

Schwergewicht



In meinem Arbeitszimmer steht ein Tresor, dessen Bodenfläche die Maße 70 cm × 50 cm besitzt. Er befindet sich auf Position ① der nebenstehenden Zeichnung.
Ich möchte ihn auf Position ② versetzen. Natürlich muss ich die Tür danach noch öffnen können.
Der Tresor ist so schwer, dass die einzige Möglichkeit ihn zu bewegen darin besteht, ihn um eine seiner Ecken herum zu drehen.

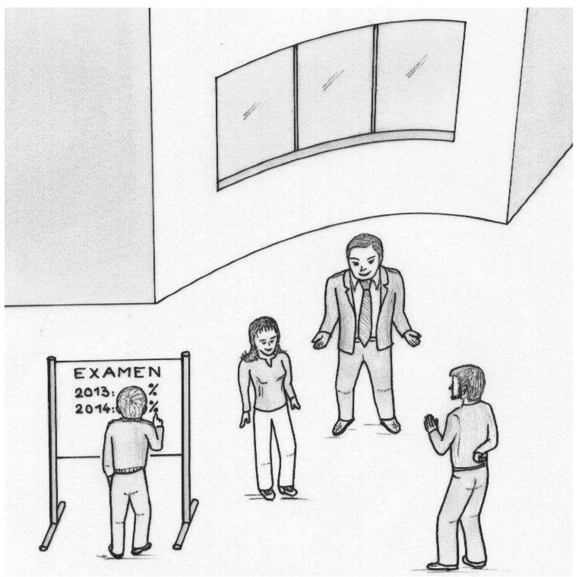
Wie muss ich den Tresor bewegen um ihn mit möglichst wenigen Drehungen auf Position 2 zu versetzen?
Zeichnet die einzelnen Etappen im Maßstab 1:10.

Aufgabe 6
5 Punkte

Quotenproblem

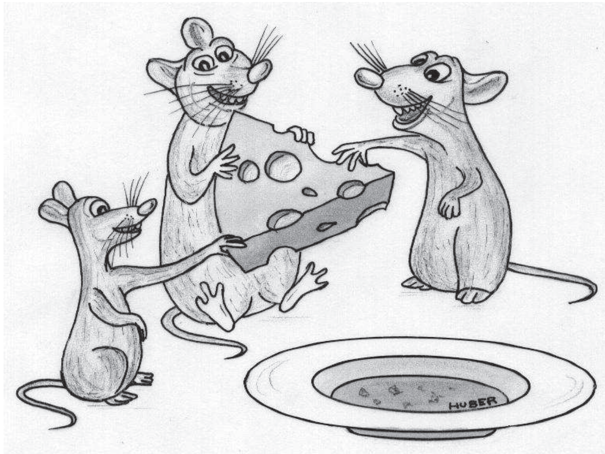
Der Schulleiter einer Schule hat die Ergebnisse einer Prüfung ausgehängt. Der Aushang enthält auch den folgenden Satz: „Die Erfolgsquote im Jahr 2014 ist im Vergleich zum Jahr 2013 um 20 % gestiegen“.
Eine Schülerin, die dies liest, subtrahiert im Kopf die beiden Erfolgsquoten und ruft: „Aber der Unterschied der beiden Quoten ist doch 12%!“
Ein Mathematiklehrer, der gerade vorbeikommt, sagt zu ihr: „Beides ist richtig!“

Berechnet die Erfolgsquote der Prüfung im Jahr 2014.



Aufgabe 7
7 Punkte

Alles Käse

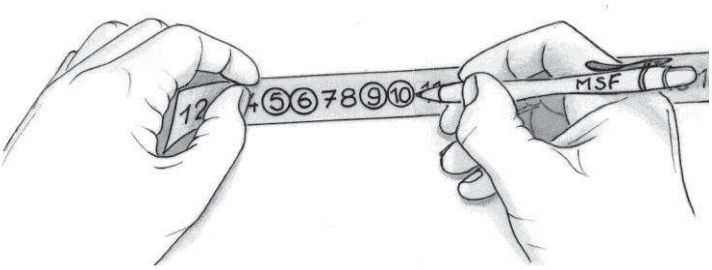


In einem Keller werden identische Stücke Schweizer Käse gelagert. Drei Mäuse, eine kleine, eine mittelgroße und eine große, kommen regelmäßig in diesen Keller um an den Käsestücken zu nagen.

- Die kleine Maus vernascht ein solches Stück in einer Viertelstunde.
- Die mittlere Maus benötigt dafür siebeneinhalb Minuten.
- Die große Maus, die gefräßigste der drei, vertilgt so ein Stück in fünf Minuten.

Eines Tages ist nur noch ein einziges Stück Käse übrig. Die drei Mäuse machen sich gleichzeitig darüber her und jede nagt in ihrem üblichen Tempo.

Wie lange wird es dauern, bis die drei Mäuse das Käsestück komplett aufgefressen haben?
Begründet eure Antwort.



Aufgabe 8
5 Punkte

Ohne Kringel

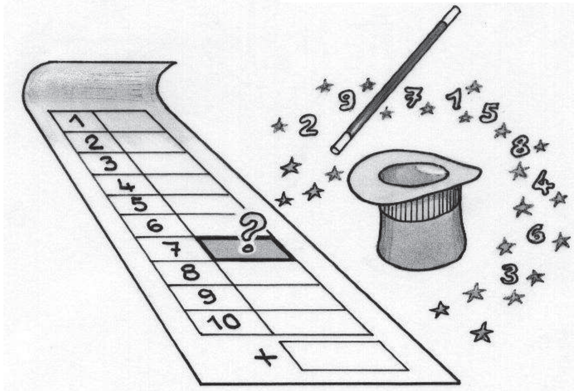
Auf einem Papierstreifen mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 2014 werden nacheinander die Vielfachen von 3 und die Vielfachen von 5 eingekreist.

Wie viele Zahlen sind danach nicht eingekreist?
Begründet eure Antwort.

Aufgabe 9
7 Punkte

Magische 7

Mathématiques SANS Frontières



Aus einem Zauberbuch:
„Bitte dein Publikum, **ohne es dir zu zeigen**, die abgebildete Tabelle folgendermaßen auszufüllen:

1. Schreibe in die ersten beiden Kästchen zwei beliebige ganze Zahlen.
2. Schreibe in jedes der folgenden acht Kästchen die Summe der Zahlen der beiden vorigen Kästchen.
3. Berechne die Summe der zehn eingetragenen Zahlen.

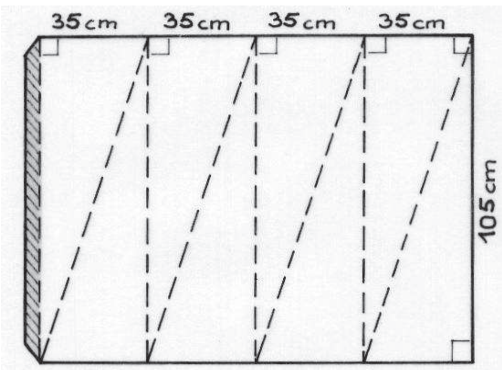
Bitte nun dein Publikum, dir die Zahl des siebten Kästchens zu nennen.
Es wird verblüfft sein, dass du ihm daraufhin sofort die Summe der zehn Zahlen nennen kannst."

Erklärt und begründet diesen Zaubertrick.

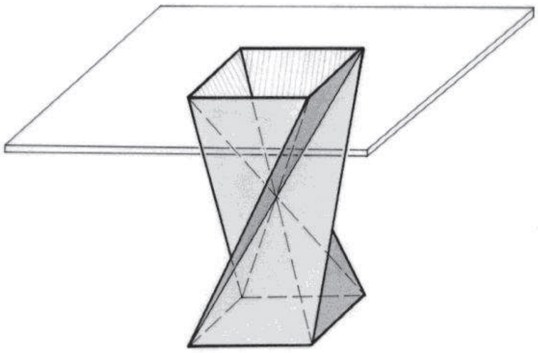
Aufgabe 10
10 Punkte

Verdreht

Für einen Empfang wurden faltbare Tische bestellt.
Bei der Lieferung sieht der Sockel dieser Tische so aus:



Zeichnet diese Figur im Maßstab 1:5.

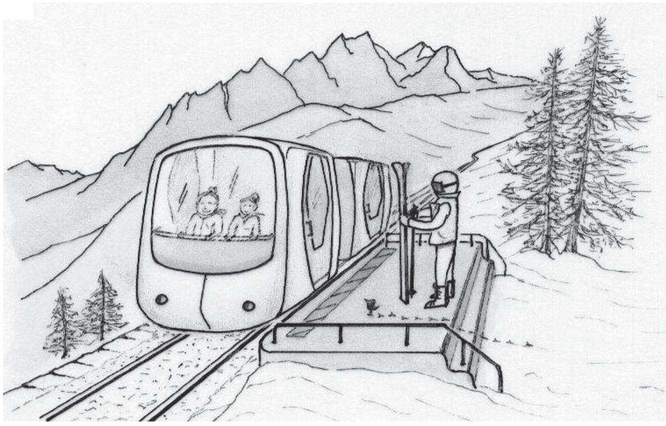


Faltet sie entlang der gestrichelten Linien und klebt sie am Klebefalz zusammen.
Stellt so das Modell des Sockels her und zeigt es eurem Lehrer.
Berechnet die Höhe des Originalsockels.

Klassenstufe 10

Aufgabe 11
5 Punkte

Bitte einsteigen!



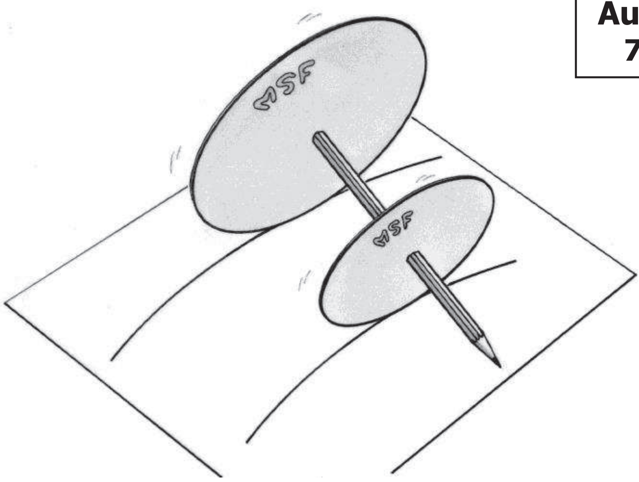
Fünf Personen steigen in die Bergbahn des *Mont Noir* ein, die aus zwei Wagen besteht.
Die Personen kennen sich nicht und bevorzugen auch keinen der beiden Wagen.
Folgende drei Aufteilungen sollen betrachtet werden:

- Alle fünf Personen sind in einem Wagen, der andere Wagen ist leer.
- Vier Personen sind in einem Wagen und eine Person im anderen.
- Drei Personen sind in einem und zwei im anderen Wagen.

Bestimmt die Wahrscheinlichkeit jeder Aufteilung. Begründet eure Antwort.

Aufgabe 12
7 Punkte

Seltsames Gebilde



Michael schneidet aus stabilem Karton zwei Scheiben mit den Durchmessern 5 cm bzw. 7 cm aus. Er durchbohrt die Scheiben in ihren Mittelpunkten und schiebt sie so auf einen Stift, dass die Mittelpunkte 8 cm voneinander entfernt sind und die Scheiben senkrecht zum Stift stehen.
Als er dieses Gebilde über den Tisch rollen lässt, beschreiben die beiden Scheiben zwei Kreise mit unterschiedlichen Radien.

Berechnet die Radien der beiden Kreise.

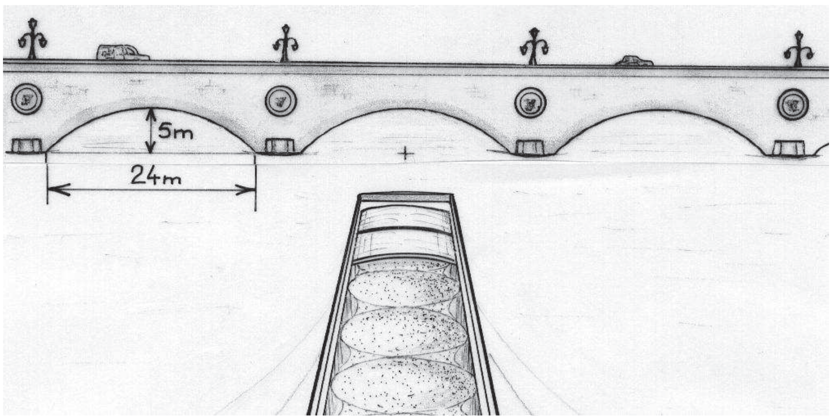
Aufgabe 13
10 Punkte

Riskantes Manöver

Während eines Hochwassers reicht das Wasser eines Flusses bis zum Beginn der kreisbogenförmigen Brückenbögen. Der maximale Abstand zwischen dem Wasserspiegel und dem höchsten Punkt des Bogens beträgt noch 5 m. Der Abstand zwischen den Brückenpfeilern beträgt jeweils 24m (siehe Abbildung).

Trotz des Verbots, den Fluss bei Hochwasser zu befahren, bewegt sich der Transportkahn *Marie-Pierre* geradewegs auf die Brücke zu.
Der Querschnitt des aus dem Wasser ragenden Schiffsteils entspricht einem Rechteck von 4 m Höhe und 12 m Breite.

Berechnet den Radius des Brückenbogens.
Kann das Schiff, ohne Schaden zu nehmen, unter der Brücke hindurchfahren? Begründet eure Antwort.



Mathématiques SANS Frontières

Mathematatik ohne Grenzen - Probewettbewerb 2014-2015
Lösungshinweise

<u>Aufgabe 1 – *Tirer le portait* – 7 Punkte</u>

Man untersucht die drei Fälle (A wahr, B falsch und C falsch; A falsch, B wahr und C falsch; A falsch, B falsch und C wahr). Die beiden ersten Fälle führen zu einem Widerspruch, der dritte Fall nicht. **Das Porträt ist also in Truhe A.**

<u>Aufgabe 2 – *Cleverle* – 5 Punkte</u>

Wenn man genau hinsieht, erkennt man, dass die zwölf Seiten der vier Dreiecke zusammen genau der Größe des Umfangs des nicht gefalteten Blattes entsprechen: Jede Seite der vier Dreiecke ist gleichzeitig eine Teilstrecke des Blattrandes und alle Punkte des Blattrandes liegen auf einer Dreiecksseite. Der Umfang der vier Dreiecke ist also insgesamt so groß wie der Umfang eines DIN A 4 Blattes, also **101,4 cm.**

<u>Aufgabe 3 – *Mobile* – 7 Punkte</u>

Ein möglicher Lösungsweg:
Im Folgenden werden für die jeweiligen Massen folgende Abkürzungen verwendet:
F (Fisch), SP (Seepferdchen), S (Seestern), Q (Querstab) und x (verdecktes Objekt).
Betrachtet man das komplette Mobile, erhält man eine erste Gleichung:
2Q + 3F + 2S + 1SP = 3Q +3F + 3SP + x ($\rightarrow$ vereinfacht: 2S = 1Q + 2SP + x)
Betrachtet man nur das Gleichgewicht des Querstabs, an dem auch das verdeckte Objekt angebracht ist, so erhält man eine zweite Gleichung:
x = 2SP + 1Q ($\rightarrow$ umgeformt 1Q = x - 2SP)
Durch Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung ergibt sich nach Umformen x = S.
Das verdeckte Objekt ist also ein Seestern.

<u>Aufgabe 4 – *Pantoffelkino* – 5 Punkte</u>

Sei n die Anzahl der Bilder des Films. Die Filmdauer in Sekunden beträgt dann im Kino n/24, im Fernsehen n/25.

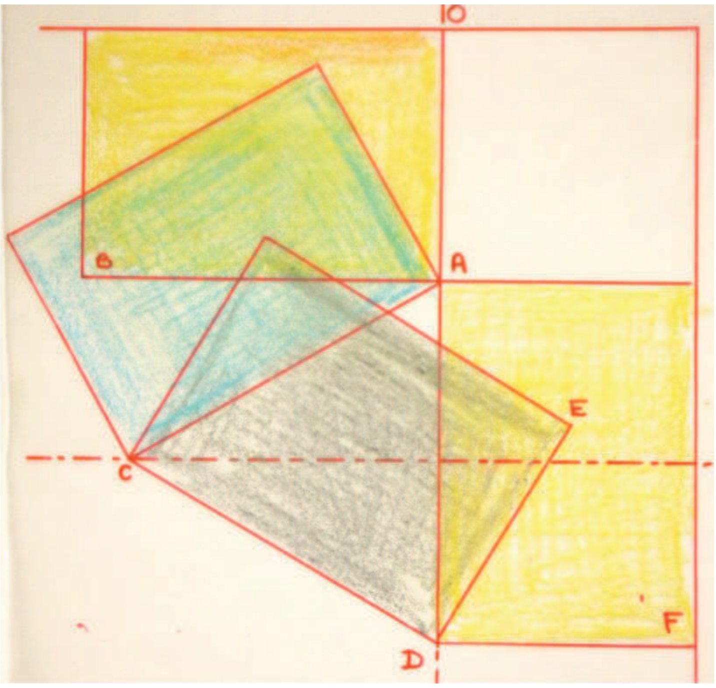
Der Unterschied der beiden Laufzeiten beträgt 9 min 30 s =570 s.

Es gilt also n/24 – n/25 = 570 und damit n = 570·24·25.

Der Film dauert im Kino 570 s · 25 = 14250 s = 3 h 57 min 30 s und im Fernsehen 3 h 48 min.

Aufgabe 5 – *Schwergewicht* – 7 Punkte

Hinweis: Die hier abgebildete Skizze entspricht nicht dem in der Aufgabenstellung angegebenen Maßstab.



(1) Man dreht so um A, dass B auf C landet, wobei C auf der Mittelsenkrechten AD liegt.
(2) Man dreht so um C, dass A auf D landet.
(3) Man dreht so um D, dass E auf F landet.

Aufgabe 6 – *Quotenproblem* – 5 Punkte

Sei q die Erfolgsquote des Jahres 2013. Dann ist die Erfolgsquote im Jahr 2014 nach Aussage des Schulleiters 1,2 q.
Da der Unterschied der beiden Quoten nach Aussage der Schülerin 12% beträgt, gilt 1,2q – q = 12 und damit q = 60.
Die Erfolgsquote ist also von 60% auf **72%** gestiegen.

Aufgabe 7 – *Alles Käse* – 7 Punkte

In 30 Sekunden frisst die kleine Maus 1/30 des Stücks, die mittlere 1/15 und die große 1/10. Insgesamt fressen die drei Mäuse in 30 Sekunden also 1/30 + 1/15 + 1/10 = 1/5 des Stücks. Für das ganze Stück brauchen sie fünfmal so lange, also **2 Minuten und 30 Sekunden**.

Aufgabe 8 – *Ohne Kringel* – 5 Punkte

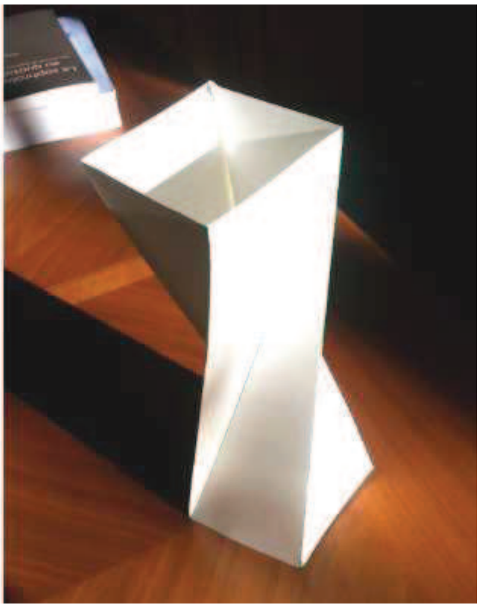
2014 : 3 = 671 Rest 1 → Es sind 671 eingekreiste Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
2014 : 5 = 402 Rest 4 → Es sind 402 eingekreiste Zahlen, die durch 5 teilbar sind.
Die durch 3 **und** durch 5 teilbaren Zahlen sind doppelt eingekreist. Es sind genau die Zahlen, die durch 15 teilbar sind.
2014 : 15 = 134 Rest 4 → Es sind also 134 Zahlen doppelt eingekreist.
Insgesamt sind 671 + 402 – 134 = 939 Zahlen eingekreist und 2014 – 939 = **1015 Zahlen nicht eingekreist.**

1	a
2	b
3	$a+b$
4	$a+2b$
5	$2a+3b$
6	$3a+5b$
7	$5a+8b$
8	$8a+13b$
9	$13a+21b$
10	$21a+34b$

Aufgabe 9 – *Magische 7* – 7 Punkte

Nennt man die ersten beiden Zahlen a und b, erhält man für die Zahl im siebten Kästchen 5a+8b (siehe Tabelle).
Die Summe der zehn aufgeschriebenen Zahlen ist $55a+88b = 11(5a+8b)$, d.h. das Elffache der Zahl im siebten Kästchen.

Aufgabe 10 – *Verdreht* – 10 Punkte



Tipp zur Herstellung des Modells:

Die 21 cm (im Original 105 cm) langen Faltlinien werden nach außen, die diagonalen Faltlinien nach innen gefaltet.

Berechnung der Höhe h:

Die Ecken des oberen und die des unteren Quadrats definieren einen Quader mit einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge 35 cm und der Höhe h. In diesem Quader entsprechen die 105 cm langen Faltlinien den Diagonalen der Seitenflächen.

Es gilt also:

$h^2 = 105^2 - 35^2 = 11025 - 1225 = 9800$

$h = \sqrt{9800} = 70\sqrt{2} \approx 99$ cm

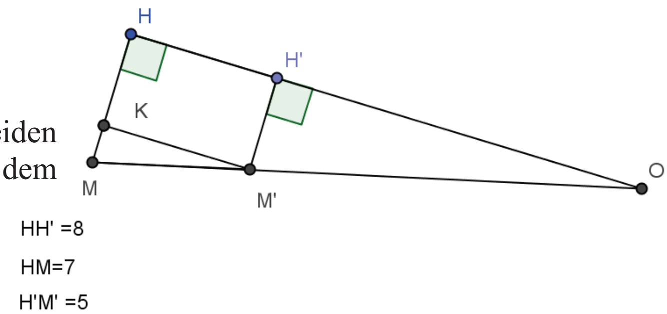
Der Originalsockel ist also etwa 99 cm hoch.

Aufgaben Klasse 10

Aufgabe 11 – *Bitte einsteigen* – 5 Punkte

Jeder Passagier wählt zufällig zwischen zwei Wagen aus; da es fünf Passagiere sind, gibt es also insgesamt $2^5 = 32$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.
Es gibt 2 Möglichkeiten dass sich alle in einem Wagen befinden; p = **2/32 = 1/16**.
Für die Verteilung 1 Pers./4 Pers. gibt es 2·5 Möglichkeiten; **p = 10/32 = 5/16**.
Für die Verteilung 2 Pers./3 Pers. bleiben, da es keine weiteren Verteilungen gibt, 20 Möglichkeiten übrig; p = **20/32 = 5/8**.

Aufgabe 12 – *Seltsames Gebilde* – 7 Punkte



Man berechnet die Entfernung der beiden Kontaktpunkte M und M' der Scheiben mit dem Tisch:

MM'$=\sqrt{8^2+(7-5)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ cm .

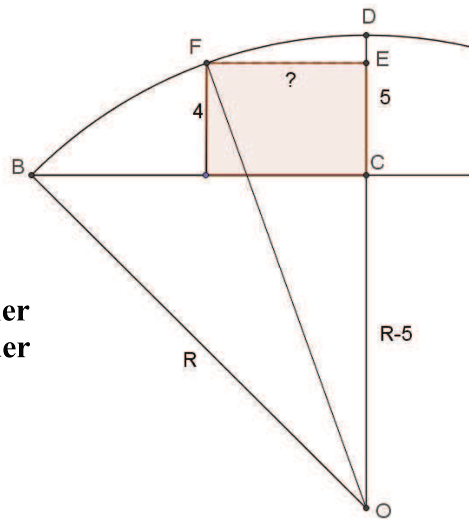
Sei r der Radius des Kreises, den der Kontaktpunkt der kleinen Scheibe beschreibt: r = OM'.
Sei R der Radius des Kreises, den der Kontaktpunkt der großen Scheibe beschreibt: R = OM.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$\frac{r}{r+\sqrt{68}}=\frac{5}{7}$ und damit $2\,r = 5\sqrt{68}$; $\boldsymbol{r = 5\sqrt{17}}$ **cm ($r \approx$ 20,62 cm)**

$\boldsymbol{R} = 5\sqrt{17}+2\sqrt{17}$ **= $7\sqrt{17}$ cm (≈ 28,86 cm).**

Aufgabe 13 – *Riskantes Manöver* – 10 Punkte



Pythagoras im Dreieck OBC ergibt:

$R^2 = (R-5)^2 + 12^2$ und damit R = 16,9 m;

Pythagoras im Dreieck OFE ergibt:

$16{,}9^2 = 15{,}9^2 + FE^2$ und damit FE ≈ 5,73 m.

Da die Entfernung zwischen den Punkten E und F kleiner als 6 m ist, kann das Schiff nicht unbeschadet unter der Brücke durchfahren.

Mathématiques SANS Frontières